UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CONTEÚDOS DIGITAIS DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Probabilidade: Diagramas de Árvore

Ana Maria Lima de Farias
Departamento de Estatística (GET/UFF)

Introdução

Nesse texto apresentaremos, de forma resumida, conceitos e propriedades básicas sobre probabilidade condicional utilizados na atividade *Probabilidade: Diagramas de Árvore*.

Experimento aleatório

Um experimento aleatório é um processo que acusa variabilidade em seus resultados, isto é, repetindo-se o experimento sob as mesmas condições, os resultados serão diferentes. Contrapondo aos experimentos aleatórios, temos os experimentos determinísticos, que são experimentos que, repetidos sob as mesmas condições, conduzem a resultados idênticos.

Espaço amostral

O espaço amostral de um experimento aleatório é o conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento. Vamos denotar tal conjunto pela letra grega ômega maiúsculo, Ω.

Eventos aleatórios

Os subconjuntos de Ω são chamados eventos aleatórios; já os elementos de Ω são chamados eventos elementares.

Definição clássica de probabilidade

Seja Ω um espaço amostral tal que todos os eventos elementares são igualmente prováveis. Se A é um evento qualquer desse espaço amostral, define-se a probabilidade de tal evento como

$$P(A) = \frac{\# A}{\# \Omega}$$

onde # representa "número de elementos de". Esta foi a primeira definição formal de probabilidade, tendo sido explicitada por Girolamo Cardano (1501-1576).

Definição axiomática de probabilidade

A definição clássica associa a cada evento de Ω um número $P(A)$, que satisfaz diversas propriedades; mas ela se baseia em duas hipóteses que restringem seu campo de aplicação: (1) Há um número finito de eventos elementares, isto é, Ω é um conjunto finito. (2) Os eventos elementares são igualmente prováveis. Em 1933, Kolmogorov (1903-1987) construiu a teoria da probabilidade partindo de um conjunto de axiomas, apresentados a seguir, em uma versão mais simples.[1]

1) $P(A) \geq 0$

2) $P(\Omega) = 1$

3) Se $A \cap B = \varnothing$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Note que a definição clássica satisfaz esses três axiomas.

Propriedades da probabilidade

As seguintes propriedades são obtidas a partir dos axiomas acima:

1) $P(\varnothing) = 0$

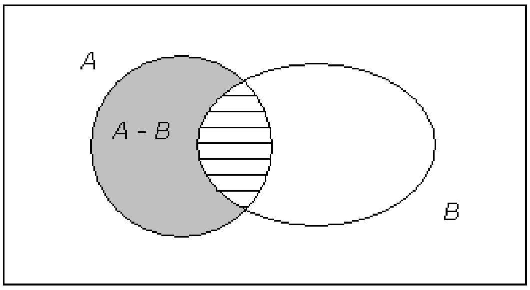
   Podemos escrever $\Omega = \Omega \cup \varnothing$ e aplicar os axiomas 2 e 3.

2) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

   Podemos escrever $\Omega = A \cup \overline{A}$ e aplicar os axiomas 2 e 3.

3) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

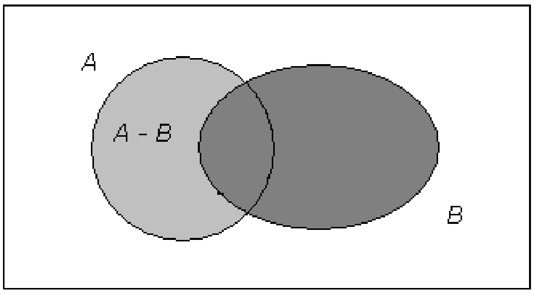
   Podemos escrever (veja a figura a seguir) $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ e aplicar o axioma 3.



4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

   Na figura abaixo podemos ver que $A \cup B = B \cup (A - B)$ e o resultado segue do axioma 3 e da propriedade anterior.

[1] Segundo o dicionário Aurélio:
Axioma
Proposição que se admite como verdadeira porque dela se podem deduzir as proposições de uma teoria ou de um sistema lógico ou matemático.



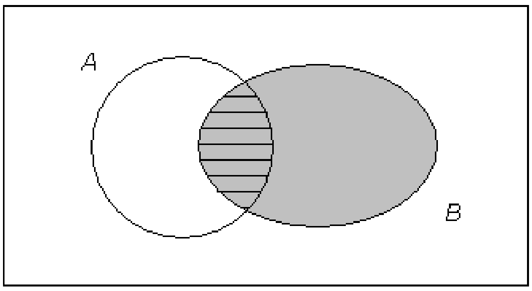
5) Se $A \subset B \Rightarrow P(A) < P(B)$

Note que $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A) \geq 0$

Probabilidade condicional

Muitas vezes, saber que um evento *B* ocorreu pode nos ajudar a reavaliar a probabilidade de ocorrência de um evento *A*. Considere o lançamento de um dado equilibrado e suponha que estejamos interessados no evento *A* = "face 2". Se não temos qualquer informação, sabemos que $P(A)$ = 1/6. Mas suponha que a seguinte informação seja fornecida: saiu face par. Com essa informação, reavaliamos a probabilidade de ocorrência do evento *A* para $P(A)$ = 1/3.

Considere a situação ilustrada na figura a seguir: se sabemos que ocorreu o evento B, esse evento passa a ser o novo espaço amostral. Nesse novo espaço amostral, a ocorrência de A equivale à ocorrência de $A \cap B$.



Dessa forma, define-se a probabilidade condicional de *A* dada a ocorrência de *B* como

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

A divisão por $P(B)$ garante que a probabilidade do novo espaço amostral – *B* – seja igual a 1.

Obs.: lê-se $P(A \mid B)$ resumidamente como "probabilidade de A dado B"

Regra da multiplicação

A regra da multiplicação trata da probabilidade da interseção de eventos. Note que, da definição de probabilidade condicional, segue o seguinte resultado:

$$P(A \cap B) = P(B) \bullet P(A \mid B)$$

Para 3 eventos temos

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_2 \cap A_1)$$

E para o caso geral, temos o seguinte resultado:

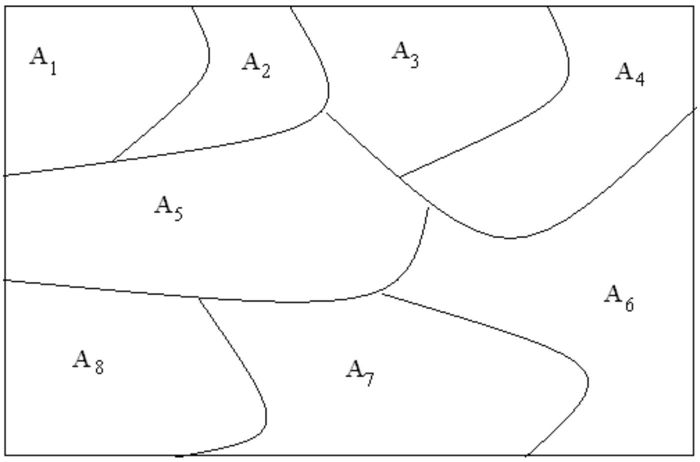
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_2 \cap A_1)\cdots P(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Teorema da probabilidade total

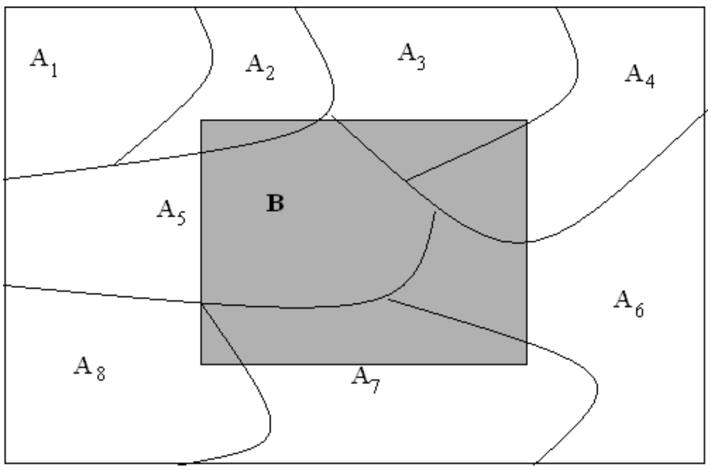
Seja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ uma coleção de eventos de um espaço amostral Ω tal que

1. $A_i \cap A_j = \varnothing \quad \forall i \neq j$
2. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

Uma tal coleção é chamada de *partição* de Ω. Veja a figura a seguir.



Seja *B* um evento de Ω.



Podemos, então, expressar *B* com a seguinte união de eventos:

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)$$

Como os A_i's são mutuamente exclusivos, segue que os $(A_i \cap B)$'s também o são. Logo,

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)] \\
&= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)]
\end{aligned}
$$

Exemplo

Em uma determinada cidade, o número de homens é igual ao número de mulheres. 5% dos homens são daltônicos e 0,4% das mulheres são daltônicas. Sorteia-se aleatoriamente uma pessoa dessa cidade e verifica-se que é daltônica. Qual é a probabilidade de ter sido sorteada uma mulher?

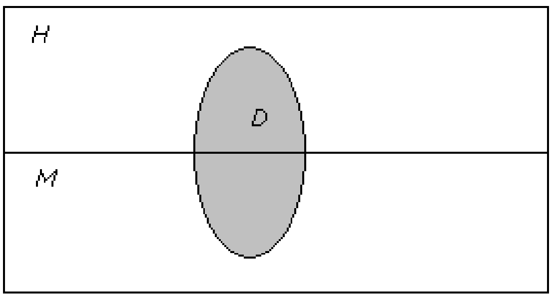
Solução

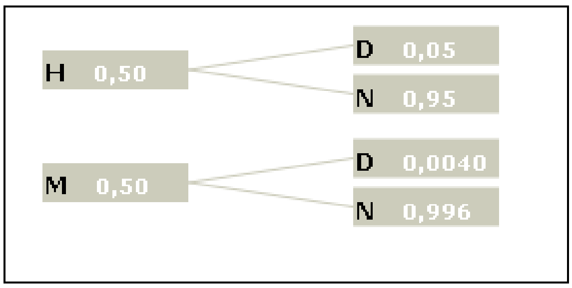
Vamos resolver esse exemplo passo a passo. A primeira coisa a observar é que o espaço amostral é formado por todos os moradores da cidade. Os eventos de interesse são "homem" (H), "mulher" (M), "daltônico", (D) e "não daltônico" (N).

Para definir a partição apropriada, temos que ver quais são as probabilidades a priori fornecidas no problema, ou seja, probabilidades dadas sem conhecimento de qualquer outro evento. As probabilidades a priori se referem aos eventos "Homem" e "Mulher". Veja a seguir a representação dessas informações num diagrama de Venn e num diagrama de árvore. O diagrama de árvore é mais apropriado, pois nos permite indicar as probabilidades.

As probabilidades dadas são:

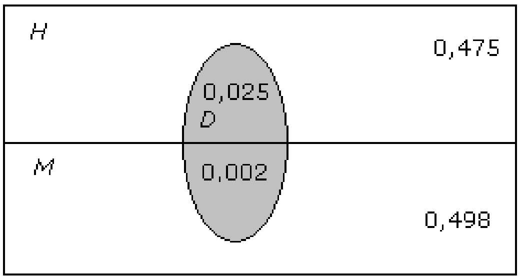
- $P(H) = P(M) = 0{,}5$
- $P(D|H) = 0{,}05 \Rightarrow P(N|H) = 0{,}95$ (a lei do complementar vale também para a probabilidade condicional)
- $P(D|M) = 0{,}004 \Rightarrow P(N|M) = 0{,}996$

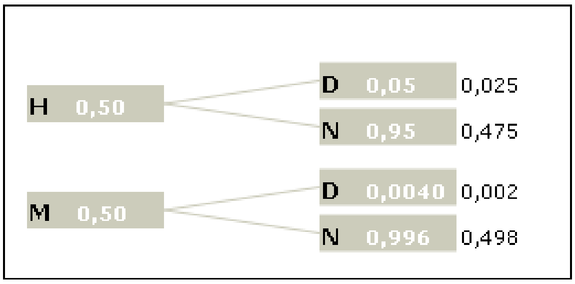




Aplicando o teorema da multiplicação obtemos as probabilidades dos seguintes eventos:

- Homem e daltônico: $P(H \cap D) = P(H) \bullet P(D \mid H) = 0{,}5 \bullet 0{,}05 = 0{,}025$
- Homem e não daltônico: $P(H \cap N) = P(H) \bullet P(N \mid H) = 0{,}5 \bullet 0{,}95 = 0{,}475$
- Mulher e daltônica: $P(M \cap D) = P(M) \bullet P(D \mid M) = 0{,}5 \bullet 0{,}004 = 0{,}002$
- Mulher e não daltônica: $P(M \cap N) = P(M) \bullet P(N \mid M) = 0{,}5 \bullet 0{,}996 = 0{,}498$





Aplicando o teorema da probabilidade total temos:

$$P(D) = P(M \cap D) + P(H \cap D) = P(H) \cdot P(D \mid H) + P(M) \cdot P(D \mid M)$$
$$= 0{,}025 + 0{,}002 = 0{,}027$$

$$P(N) = P(M \cap N) + P(H \cap N) = P(H) \cdot P(N \mid H) + P(M) \cdot P(N \mid M)$$
$$= 0{,}475 + 0{,}498 = 0{,}973 = 1 - P(D)$$

Agora, vamos calcular a probabilidade pedida, P(M|D), que é uma probabilidade a *posteriori*, isto é, vamos atualizar a probabilidade do evento "ser mulher" sabendo que ocorreu o evento D (no enunciado foram dadas a probabilidade a priori $P(M)$ e a probabildiade de "daltônico dado que é mulher"):

$$P(M \mid D) = \frac{P(M \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}002}{0{,}027} = 0{,}074$$

Bibliografia

Farias, A. M. L.; Laurencel, L. C. *Probabilidade.* Apostila. Departamento de Estatística. Niterói: UFF 2008 (versão para download em http://www.professores.uff.br/anafarias/probab_2008.pdf

Morgado, A.C.O.; Carvalho, J.B.P.; Carvalho, P.C.P.; Fernandez, P. *Análise Combinatória e Probabilidade*, Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006

Hazzan, S. *Fundamentos de Matemática Elementar: Combinatória, Probabilidade* - vol. 5, 7a. edição. São Paulo: Atual Editora, 2004.

Julianelli, J.R.; Dassie, B.A.; Lima, M.L.A.; Sá, I.P. *Curso de Análise Combinatória e Probabilidade - Aprendendo com a resolução de problemas*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2009.