

Taxas e Índices

Ana Maria Lima de Farias
Dirce Uesu Pesco

Introdução

Nesse texto apresentaremos conceitos básicos sobre índices e taxas. Embora existam aplicações em diversos contextos, nessas notas utilizaremos exemplos relacionados a índices econômicos, tendo em vista o estudo de juros simples e compostos. Sendo assim, analisaremos variações de grandezas ao longo do tempo.

Sejam Q_1 e Q_2 as quantidades de determinado bem consumidas em dois instantes de tempo. Analogamente, sejam P_1 e P_2 os preços unitários e V_1 e V_2 os valores totais gastos com esse bem nos mesmos instantes de tempo. As letras P , Q e V serão usadas como subscritos para indicar a qual das três grandezas estamos nos referindo.

Base de comparação

Índices e taxas envolvem comparações de grandezas. Assim, é fundamental que se defina a base de comparação. Por exemplo, na comparação do Produto Interno Bruto de diversos países, se tomarmos os Estados Unidos como base de comparação, o índice do Brasil certamente será menor que 1; isso não ocorrerá se a base de comparação for o Uruguai, por exemplo.

Nessas notas nossa base de comparação será o instante de tempo 1.

Variação absoluta

Define-se a variação absoluta como a diferença entre os valores das grandezas.

$$VA = Q_2 - Q_1$$

Como a base está definida no período 1, tiramos de Q_2 a quantidade Q_1 , para ver o “quanto sobra”.

Exemplo: Consideremos o consumo (em kg) de arroz de duas famílias em dois instantes de tempo, conforme resumido na tabela seguinte:

Família	Q_1	Q_2	$Q_2 - Q_1$
Silva	10	11	$11 - 10 = 1$
Pereira	1	2	$2 - 1 = 1$

A variação absoluta é a mesma para as duas famílias. Mas podemos ver que essa variação de 1 kg tem importância diferente para as duas famílias. Como medir isso?

Varição relativa

Uma forma de quantificar essa diferença é vendo o quanto a variação absoluta representa no valor da grandeza no período base. Define-se, então, a variação relativa como

$$VR_Q = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_1}$$

A variação relativa é também chamada taxa de variação e é usual apresentá-la em forma percentual.

Exemplo (continuação)

A variação relativa para a família Silva é

$$VR_{\text{Silva}} = \frac{1}{10} = 0,1 = \frac{10}{100} = 10\%$$

e para a família Pereira é

$$VR_{\text{Pereira}} = \frac{1}{2} = 0,5 = \frac{50}{100} = 50\%$$

Família	Q_1 (kg)	Q_2 (kg)	$VA_Q = Q_2 - Q_1$ (kg)	$VR_Q = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_1}$
Silva	10	11	$11 - 10 = 1$	$0,1 = 10\%$
Pereira	1	2	$2 - 1 = 1$	$0,5 = 50\%$

Índice de variação

Note que a variação relativa pode ser escrita como

$$VR_Q = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_1} = \frac{Q_2}{Q_1} - 1$$

A razão $\frac{Q_2}{Q_1}$ é outra medida de variação relativa, chamada índice de variação:

$$IV_Q = \frac{Q_2}{Q_1}$$

O índice nos diz quantas vezes Q_2 é maior ou menor do que Q_1 .

Exemplo (continuação)

Para a família Silva temos um índice de 1,1 e para a família Pereira, o índice é 1,5.

Família	Q_1 (kg)	Q_2 (kg)	$VA_Q = Q_2 - Q_1$ (kg)	$VR_Q = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_1}$	$IV_Q = \frac{Q_2}{Q_1}$
Silva	10	11	$11 - 10 = 1$	$0,1 = 10\%$	1,1
Pereira	1	2	$2 - 1 = 1$	$0,5 = 50\%$	1,5

Índice versus taxa

Das definições acima, tem-se a seguinte relação:

$$VR = IV - 1$$

O índice de variação é sempre não negativo; valores menores que 1 indicam um decréscimo, enquanto valores maiores que 1 indicam acréscimo. O índice será igual a 1 quando não houver variação entre as grandezas. Para essas três situações, a taxa será negativa, positiva ou nula, respectivamente.

Uma característica fundamental de índices e taxas é que eles são medidas adimensionais, ou seja, eles não dependem da unidade de medida dos dados originais.

Alguns resultados sobre índices de preço, quantidade e valor

Da mesma forma que definimos índices e taxas de variação de quantidade, podemos definir índices e taxas de preços e valores. Se P denota o preço unitário de certo item, então o valor gasto com esse item é dado por

$$V = P \times Q$$

Exemplo (continuação)

Continuando com nosso exemplo, considere as seguintes informações sobre o preço do arroz pago pelas duas famílias.

Família	Q_1 (kg)	P_1 (R\$/kg)	V_1 (R\$)	Q_2 (kg)	P_2 (R\$/kg)	V_2 (R\$)
Silva	10	2,85	28,50	11	2,80	30,80
Pereira	1	3,20	3,20	2	3,35	6,70

Para a família Silva temos:

$$IV_Q = \frac{11}{10} = 1,1$$

$$IV_P = \frac{2,80}{2,85} = 0,98245614$$

$$IV_V = \frac{30,80}{28,50} = 1,08070175$$

Para a família Pereira temos:

$$IV_Q = \frac{2}{1} = 2,0$$

$$IV_P = \frac{3,35}{3,20} = 1,04687500$$

$$IV_V = \frac{6,70}{3,20} = 2,0937500$$

Note que $0,98245614 \times 1,1 = 1,08070175$ e $2 \times 1,046875 = 2,09375$.

- Decomposição das causas

Note o seguinte:

$$IV_V = \frac{V_2}{V_1} = \frac{P_2 \times Q_2}{P_1 \times Q_1} = \frac{P_2}{P_1} \times \frac{Q_2}{Q_1} = IV_P \times IV_Q$$

Da mesma forma que o valor é dado pelo produto do preço e da quantidade, o índice de valor é o produto dos índices de preço e de quantidade.

- Índices em cadeia

Considere a seguinte sequência de índices em cadeia:

$$\frac{Q_1}{Q_0}; \frac{Q_2}{Q_1}; \dots; \frac{Q_n}{Q_{n-1}}$$

A multiplicação desses índices resulta em

$$\frac{Q_1}{Q_0} \times \frac{Q_2}{Q_1} \times \dots \times \frac{Q_n}{Q_{n-1}} = \frac{Q_n}{Q_0}$$

Esses e outros resultados são importantes no estudo da teoria de números índices, mas com esses conceitos iniciais você poderá desenvolver a atividade e ganhar experiência básica no tratamento das medidas de variação entre grandezas.

- Taxa média

Vimos acima que a multiplicação dos índices em cadeia resulta no índice de variação entre o último e o primeiro períodos. Na expressão

$$\frac{Q_1}{Q_0} \times \frac{Q_2}{Q_1} \times \dots \times \frac{Q_n}{Q_{n-1}}$$

há n termos. Considere a raiz de ordem n desse produto:

$$IM = \sqrt[n]{\frac{Q_1}{Q_0} \times \frac{Q_2}{Q_1} \times \dots \times \frac{Q_n}{Q_{n-1}}}$$

Essa raiz é um índice. Note que, multiplicando n vezes esse índice, obtemos novamente $\frac{Q_n}{Q_0}$, ou seja, obtemos o mesmo índice de variação global, só que a partir de índices parciais constantes. Esse é o *índice médio*, a partir do qual se gera a *taxa média*.

Bibliografia

Farias, A. M. L.; Laurencel, L. C. *Números Índices*. Apostila. Departamento de Estatística. Niterói: UFF 2008 (versão para download em http://www.professores.uff.br/anafarias/numindice_2008.pdf)

IBGE. *Para compreender o INPC: um texto simplificado*. Coordenação de Índices de Preços, 5a. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2006. (versão para download em http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/indicadores/precos/inpc_ipca/INPC2006.pdf)