Universidade Federal Fluminense
Conteúdos Digitais em Matemática e Estatística

Taxas e Índices

Ana Maria Lima de Farias
Dirce Uesu Pesco

Introdução

Nesse texto apresentaremos conceitos básicos sobre índices e taxas. Embora existam aplicações em diversos contextos, nessas notas utilizaremos exemplos relacionados a índices econômicos, tendo em vista o estudo de juros simples e compostos. Sendo assim, analisaremos variações de grandezas ao longo do tempo.

Sejam Q_1 e Q_2 as quantidades de determinado bem consumidas em dois instantes de tempo. Analogamente, sejam P_1 e P_2 os preços unitários e V_1 e V_2 os valores totais gastos com esse bem nos mesmos instantes de tempo. As letras *P*, *Q* e *V* serão usadas como subscritos para indicar a qual das três grandezas estamos nos referindo.

Base de comparação

Índices e taxas envolvem comparações de grandezas. Assim, é fundamental que se defina a base de comparação. Por exemplo, na comparação do Produto Interno Bruto de diversos países, se tomarmos os Estados Unidos como base de comparação, o índice do Brasil certamente será menor que 1; isso não ocorrerá se a base de comparação for o Uruguai, por exemplo.

Nessas notas nossa base de comparação será o instante de tempo $t = 0$.

Variação absoluta

Define-se a variação absoluta como a diferença entre os valores das grandezas.

$$VA = Q_1 - Q_0$$

Como a base está definida no período 0, tiramos de Q_1 a quantidade Q_0, para ver o "quanto sobra".

<u>Exemplo</u>: Consideremos o consumo (em kg) de arroz de duas famílias em dois instantes de tempo, conforme resumido na tabela seguinte:

Família	Q_0	Q_1	$Q_1 - Q_0$
Silva	10	11	11 – 10 = 1
Pereira	1	2	2 – 1 = 1

A variação absoluta é a mesma para as duas famílias. Mas podemos ver que essa variação de 1 kg tem importância diferente para as duas famílias. Como medir isso?

Variação relativa

Uma forma de quantificar essa diferença é vendo o quanto a variação absoluta representa no valor da grandeza no período base. Define-se, então, a variação relativa como

$$VR_{0,1}^{Q} = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_0}$$

É usual indicar os períodos sendo comparados, bem como o tipo de índice que se está calculando. Assim, no subscrito aparecem os períodos base (0) e de análise (1) e no sobrescrito indica-se com Q o fato de estarmos calculando índices de quantidade.

A variação relativa é também chamada taxa de variação e é usual apresentá-la em forma percentual: $100 \times VR_{0,1}^{Q}$

<u>Exemplo</u> (continuação)

A variação relativa para a família Silva é

$$VR_{0,1}^{\text{Silva}} = \frac{1}{10} = 0{,}1 = \frac{10}{100} = 10\%$$

e para a família Pereira é

$$VR_{0,1}^{\text{Pereira}} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = \frac{50}{100} = 50\%$$

Família	Q_0 (kg)	Q_1 (kg)	$VA_{0,1}^{Q} = Q_1 - Q_0$ (kg)	$VR_{0,1}^{Q} = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_0}$

Silva	10	11	11 – 10 = 1	0,1 = 10%
Pereira	1	2	2 – 1 = 1	0,5 = 50%

Índice de variação

Note que a variação relativa pode ser escrita como

$$VR_{0,1}^{Q} = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_0} = \frac{Q_1}{Q_0} - 1$$

A razão $\frac{Q_1}{Q_0}$ é outra medida de variação relativa, chamada índice de variação:

$$IV_{0,1}^{Q} = \frac{Q_1}{Q_0}$$

O índice nos diz quantas vezes Q_1 é maior ou menor do que Q_0.

<u>Exemplo</u> (continuação)

Para a família Silva temos um índice de 1,1 e para a família Pereira, o índice é 1,5.

Família	Q_0 (kg)	Q_2 (kg)	$VA_{0,1}^{Q} = Q_1 - Q_0$ (kg)	$VR_{0,1}^{Q} = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_0}$	$IV_{0,1}^{Q} = \frac{Q_1}{Q_0}$
Silva	10	11	11 – 10 = 1	0,1 = 10%	1,1
Pereira	1	2	2 – 1 = 1	0,5 = 50%	1,5

Índice versus taxa

Das definições acima, tem-se a seguinte relação:

$$VR = IV - 1$$

O índice de variação é sempre não negativo; valores menores que 1 indicam um decréscimo, enquanto valores maiores que 1 indicam acréscimo. O índice será igual a 1 quando não houver variação entre as grandezas. Para essas três situações, a taxa será negativa, positiva ou nula, respectivamente.

Uma característica fundamental de índices e taxas é que eles são medidas adimensionais, ou seja, eles não dependem da unidade de medida dos dados originais.

Alguns resultados sobre índices de preço, quantidade e valor

Da mesma forma que definimos índices e taxas de variação de quantidade, podemos definir índices e taxas de preços e valores. Se P denota o preço unitário de certo item, então o valor gasto com esse item é dado por

$$V = P \times Q$$

Exemplo (continuação)

Continuando com nosso exemplo, considere as seguintes informações sobre o preço do arroz pago pelas duas famílias.

Família	Q_0 (kg)	P_0 (R$/kg)	V_0 (R$)	Q_1 (kg)	P_1 (R$/kg)	V_1 (R$)
Silva	10	2,85	28,50	11	2,80	30,80
Pereira	1	3,20	3,20	2	3,35	6,70

Para a família Silva temos:

$$IV_{0,1}^{Q} = \frac{11}{10} = 1,1$$

$$IV_{0,1}^{P} = \frac{2,80}{2,85} = 0,98245614$$

$$IV_{0,1}^{V} = \frac{30,80}{28,50} = 1,08070175$$

Para a família Pereira temos:

$$IV_{0,1}^{Q} = \frac{2}{1} = 2,0$$

$$IV_{0,1}^{P} = \frac{3,35}{3,20} = 1,04687500$$

$$IV_{0,1}^{V} = \frac{6,70}{3,20} = 2,0937500$$

Note que 0,98245614 × 1,1 = 1,08070175 e 2 × 1,046875 = 2,09375.

- Decomposição das causas

Note o seguinte:

$$IV_{0,1}^{V} = \frac{V_1}{V_0} = \frac{P_1 \times Q_1}{P_0 \times Q_0} = \frac{P_1}{P_0} \times \frac{Q_1}{Q_0} = IV_{0,1}^{P} \times IV_{0,1}^{Q}$$

Da mesma forma que o valor é dado pelo produto do preço e da quantidade, o índice de valor é o produto dos índices de preço e de quantidade.

- Índices em cadeia

Considere a seguinte sequência de índices em cadeia:

$$\frac{Q_1}{Q_0};\frac{Q_2}{Q_1};\cdots;\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$$

A multiplicação desses índices resulta em

$$\frac{Q_1}{Q_0} \times \frac{Q_2}{Q_1} \times \cdots \times \frac{Q_n}{Q_{n-1}} = \frac{Q_n}{Q_0}$$

<u>Exemplo</u> (continuação)

Suponhamos que, para a família Silva, tenhamos

$$IV_{1,2}^{Q} = \frac{Q_2}{Q_1} = 1,15$$

Fazendo

$$\frac{Q_1}{Q_0} \times \frac{Q_2}{Q_1} = 1,11 \times 1,15 = 1,2765$$

resulta que o aumento da quantidade entre os meses 2 e 0 foi de 27,65%.

Esse resultado nos permite, por exemplo, calcular a inflação acumulada em determinado período a partir dos índices mensais.

Esses e outros resultados são importantes no estudo da teoria de números índices, mas com esses conceitos iniciais você poderá desenvolver a atividade e ganhar experiência básica no tratamento das medidas de variação entre grandezas.

- Taxa média

Vimos acima que a multiplicação dos índices em cadeia resulta no índice de variação entre o último e o primeiro períodos. Na expressão

$$\frac{Q_1}{Q_0} \times \frac{Q_2}{Q_1} \times \cdots \times \frac{Q_n}{Q_{n-1}}$$

há n termos. Considere a raiz de ordem n desse produto:

$$IM = \sqrt[n]{\frac{Q_1}{Q_0} \times \frac{Q_2}{Q_1} \times \cdots \times \frac{Q_n}{Q_{n-1}}}$$

Essa raiz é um índice. Note que, multiplicando n vezes esse índice, obtemos novamente $\frac{Q_n}{Q_0}$, ou seja, obtemos o mesmo índice de variação global, só que a partir de índices parciais constantes. Esse é o *índice médio*, a partir do qual se gera a *taxa média*. Assim, o índice médio é dado pela média geométrica dos índices parciais.

Exemplo

Considere as seguintes taxas de variação mensal relativas à quantidade de leite consumida pela família Silva:

Mês	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun
Taxa mensal (%)	5,1	4,8	6,3	7,2	5,9	6,5

Cada uma dessas taxas representa a variação relativa ao mês anterior. Por exemplo, em março, a família consumiu uma quantidade 6,3% maior que a quantidade consumida em fevereiro.

Para que possamos fazer comparações, é preciso que os índices estejam na mesma base de comparação. Analisando os dados acima em termos de índice, temos os seguintes valores:

$$\frac{Q_{jan}}{Q_{dez}} = 1,051 \quad \frac{Q_{fev}}{Q_{jan}} = 1,048 \quad \frac{Q_{mar}}{Q_{fev}} = 1,063 \quad \frac{Q_{abr}}{Q_{mar}} = 1,072 \quad \frac{Q_{mai}}{Q_{abr}} = 1,059 \quad \frac{Q_{jun}}{Q_{ma1}} = 1,065$$

Encadeando esses índices obtemos todos os índices com base em dezembro:

$$Q_{dez,jan} = 1,051$$

$$Q_{dez,fev} = \frac{Q_{fev}}{Q_{dez}} = \frac{Q_{jan}}{Q_{dez}} \times \frac{Q_{fev}}{Q_{jan}} = 1,051 \times 1,048$$

$$Q_{dez,mar} = \frac{Q_{mar}}{Q_{dez}} = \frac{Q_{jan}}{Q_{dez}} \times \frac{Q_{fev}}{Q_{jan}} \times \frac{Q_{mar}}{Q_{fev}} = 1,051 \times 1,048 \times 1,063$$

$$Q_{dez,abr} = \frac{Q_{abr}}{Q_{dez}} = \frac{Q_{jan}}{Q_{dez}} \times \frac{Q_{fev}}{Q_{jan}} \times \frac{Q_{mar}}{Q_{fev}} \times \frac{Q_{abr}}{Q_{mai}} = 1,051 \times 1,048 \times 1,063 \times 1,072$$

$$Q_{dez,mai} = \frac{Q_{mai}}{Q_{dez}} = \frac{Q_{jan}}{Q_{dez}} \times \frac{Q_{fev}}{Q_{jan}} \times \frac{Q_{mar}}{Q_{fev}} \times \frac{Q_{abr}}{Q_{mai}} \times \frac{Q_{mai}}{Q_{abr}} = 1,051 \times 1,048 \times 1,063 \times 1,072 \times 1,059$$

$$Q_{dez,jun} = \frac{Q_{jun}}{Q_{dez}} = \frac{Q_{jan}}{Q_{dez}} \times \frac{Q_{fev}}{Q_{jan}} \times \frac{Q_{mar}}{Q_{fev}} \times \frac{Q_{abr}}{Q_{mar}} \times \frac{Q_{mai}}{Q_{abr}} \times \frac{Q_{jun}}{Q_{mai}} = 1,051 \times 1,048 \times 1,063 \times 1,072 \times 1,059 \times 1,065$$

Agora, veja o resultado da divisão de dois desses índices, por exemplo:

$$\frac{Q_{dez,abr}}{Q_{dez,fev}} = \frac{\frac{Q_{abr}}{Q_{dez}}}{\frac{Q_{fev}}{Q_{dez}}} = \frac{Q_{abr}}{Q_{fev}}$$

Assim, a divisão de dois desses índices nos dá o índice de variação entre os meses em questão. Se queremos saber qual foi a variação no segundo trimestre, basta dividir $Q_{dez,jun}$ por $Q_{dez,mar}$.

Bibliografia

Farias, A. M. L.; Laurencel, L. C. *Números Índices.* Apostila. Departamento de Estatística. Niterói: UFF 2008 (versão para download em http://www.professores.uff.br/anafarias/numindice_2008.pdf

IBGE. *Para compreender o INPC: um texto simplificado.* Coordenação de Índices de Preços, 5a. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2006. (versão para download em http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/indicadores/precos/inpc_ipca/INPC2006.pdf